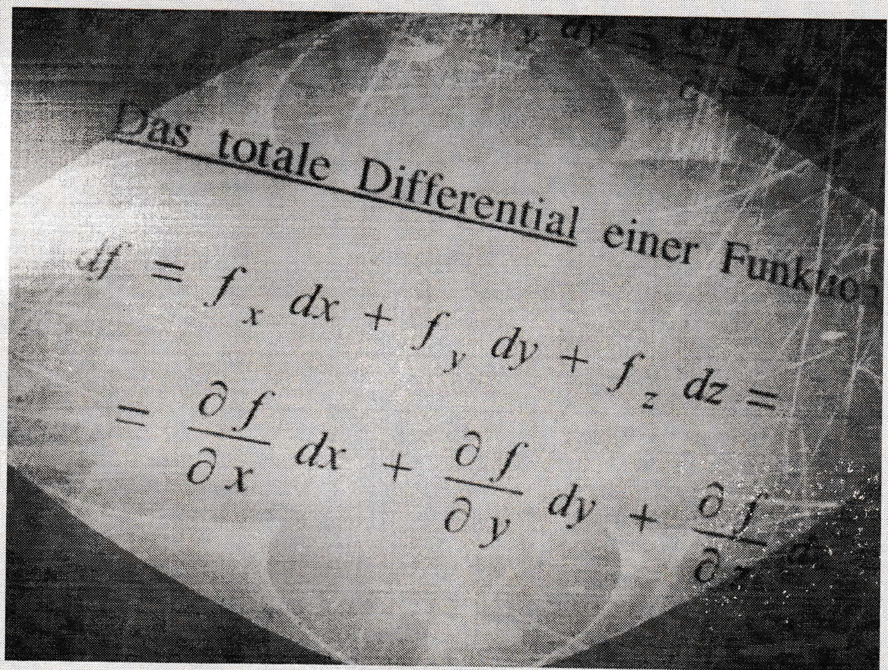
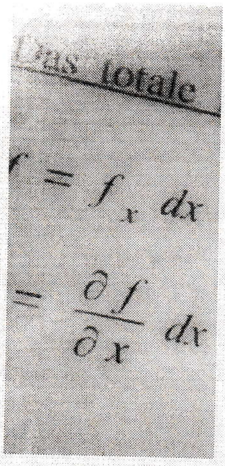
1



Das totale Differential

Das totale Differential

2



Definition 1:

Unter dem totalen oder vollständigen Differential einer differenzierbaren Funktion $f = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen versteht man den linearen Differentialausdruck

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

Das totale Differential ist ein Maß für die Veränderung der Funktion $z = f(x, y)$, wenn man im Punkt $P\ (x, y)$ ein Stück in die Richtung $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ geht.

3

Definition 2:

Die Funktionswerte, die sich bei Verschiebung des Punktes P ergeben,

$$P\,(x_0,\ y_0) \quad \rightarrow \quad P'\,(x_0 + dx\,,\ y_0 + dy)$$

werden durch das folgende Differential näherungsweise als auf der Tangentialebene im Punkt P liegend beschrieben

$$df = f_x(x_0,\ y_0)\,dx + f_y(x_0,\ y_0)\,dy$$

Diese lineare Änderung der Funktion f wird als das totale Differential bezeichnet.

Geometrische Deutung: Bei einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen beschreibt das totale oder vollständige Differential die Änderung des Funktionswertes entsprechend der im Berührungspunkt P errichteten Tangentialebene.

Das totale Differential

4

Das totale Differential einer Funktion $f = f(x, y, z)$

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

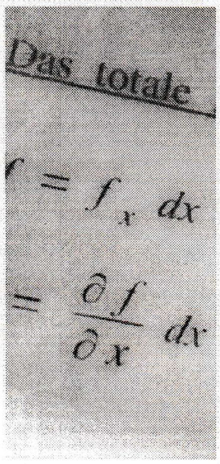
Das totale Differential der Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$dy = f_{x_1}\, dx_1 + f_{x_2}\, dx_2 + \ldots + f_{x_n}\, dx_n =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

Das totale Differential: Aufgabe 1

5



Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen $f = f(x, y)$:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = 3x^4 - 7xy + x$

c) $f(x, y) = 2x \sin y + 3xy$

d) $f(x, y) = e^{x y^2}$

e) $f(x, y) = x^3 \sin y + y^2$

f) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

h) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

Das totale Differential: Lösung 1

6

a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad df = 2\,x\,dx + 2\,y\,dy$

b) $f(x, y) = 3\,x^4 - 7\,xy + x, \qquad df = \left(12\,x^3 - 7\,y + 1\right) dx - 7\,x\,dy$

c) $f(x, y) = 2\,x \sin y + 3\,x\,y$

$df = (2 \sin y + 3\,y)\,dx + (2\,x \cos y + 3\,x)\,dy$

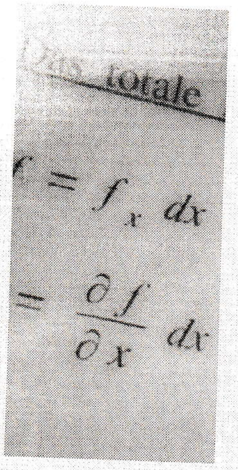
d) $f(x, y) = e^{x\,y^2}, \qquad df = e^{x\,y^2}\left(y^2\,dx + 2\,xy\,dy\right)$

e) $f(x, y) = x^3 \sin y + y^2, \qquad df = 3\,x^2 \sin y\,dx + (x^3 \cos y + 2\,y)\,dy$

f) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}, \qquad df = -2\,\dfrac{x\,dx + y\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

h) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}, \qquad df = -\dfrac{2\,x\,y\,dx}{(x^2 + 1)^2} + \dfrac{dy}{x^2 + 1}$

Das totale Differential: Aufgaben 2, 3



Aufgabe 2:

Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen $f = f(x, y, z)$:

a) $f(x, y, z) = x\,y\,z$

b) $f(x, y, z) = \ln(x\,y\,z)$

c) $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen im Punkt P :

a) $f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y\,, \qquad P(x, y) = (3, 2)$

b) $f(x, y) = x^2 - 3\cos y \cdot e^x + y\,, \qquad P(x, y) = (0, \pi)$

8

Lösung 2:

a) $f(x, y, z) = x\,y\,z\,,\qquad df = y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz$

b) $f(x, y, z) = \ln(x\,y\,z)\,,\qquad df = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dz}{z}$

c) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}\,,\qquad df = 2\,e^{x^2+y^2+z^2}\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$

Lösung 3:

a) $df = f_x(3,\ 2)\ dx + f_y\ (3,\ 2)\ dy = 12\ dx + 9\,dy$

b) $f_x(x, y) = 2\,x - 3\ \cos y \cdot e^x\,,\qquad f_y(x, y) = 3\ \sin y \cdot e^x + 1$

$df\ (0, \pi) = f_x\ (0, \pi)\ dx + f_y\ (0, \pi)\ dy = 3 \cdot dx + dy$