

# 1 Statistik: Das Spiel mit dem Würfel

## 1.1 Definition des Gegenstandes

Der Hauptgegenstand in diesem ersten Teil des Buches ist der klassische sechsseitige Würfel. Wir denken zunächst an den perfekten mathematischen Würfel ohne Verfälschungen, sollte man unterwegs beim Lesen den Faden verlieren, kommt man immer wieder auf den perfekten Würfel zurück. Sehr wichtig ist die Gleichung (1.1), die auch noch Würfelgleichung genannt wird oder präziser die verallgemeinerte Momentengleichung.

Hier sind sechs verschiedene Elementarereignisse  $\varepsilon_i$  möglich und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eines dieser Elementarereignisse auftritt ist  $\frac{1}{6}$ . In dem ganzen Kapitel 1 geht man davon aus, dass eine normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung gegeben ist (siehe Formel (1.2)).

Wer den Würfel kennt, der weiß, dass der nächste Wurf nicht voraussagbar ist, aber der Mittelwert, die Varianz und andere statistischen Größen können sich aus einer einzigen Formel, die gleich gezeigt wird (siehe Formel (1.1)), ableiten lassen.

## 1.2 Einführung

Eine der wohl wichtigsten Gleichungen in der statistischen Thermodynamik kann schon anhand des Würfels, einem Objekt das jeder kennt, erklärt werden.

$$E_c^{(m)} = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - c)^m \cdot P(\varepsilon_i) \quad (1.1)$$

Auf den ersten Blick sieht diese Gleichung sehr abstrakt, kompliziert und abschreckend aus, man möchte sie auf keinen Fall auswendig lernen oder in einer Prüfung wiedergeben müssen. Man sollte sie aber auswendig lernen, da alle weitere Formeln in diesem Kapitel, die wesentlich einfacher sind, sich von dieser Formel ableiten lassen. Anhand vom Beispiel des Würfels kann die Formel (1.1) aber sehr einfach und intuitiv erklärt werden.

Das Symbol  $E_c^{(m)}$  bezeichnet das  $m$ -te Moment<sup>1</sup> des Würfels. Das in Klammern gefasste Symbol  $(m)$  ist eine beliebige natürliche Ordinalzahl, einschließlich der Null. Genau genommen ist es das  $m$ -te Moment der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels.  $c$  ist eine reelle Zahl die willkürlich gewählt werden kann (zum Beispiel  $c = 17$ ,  $c = \pi$  oder  $c = -e$ ),  $n$  ist die Anzahl der möglichen Elementarereignisse, beim Würfel sind dies 6 Stück,  $\varepsilon_i$  ist der Wert des Elementarereignisses das gerade stattgefunden hat, beim Würfel gilt  $\varepsilon_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $P(\varepsilon_i)$  ist die normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung oder vereinfacht die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elementarereignis stattfindet und wird oft nur als Verteilung bezeichnet. Die Menge aller möglichen Elementarereignisse hat die Mächtigkeit 6. Dies ist beim idealen Würfel, der auch als mathematischer Würfel bezeichnet wird,  $\frac{1}{6}$  für jedes Elementarereignis.

---

<sup>1</sup> Mit einem Moment wird kein Augenblick in der Zeit bezeichnet, sondern ein stationärer Sachverhalt. Der Begriff Moment bezieht sich auf die Verteilung. Beide Begriffe dürfen auf keinen Fall verwechselt werden.

**1.3 Nomenklatur und Begriffe****1.4 Der Zufall und die absolute Sicherheit****1.5 Die Ereignisse in einem Zufallsexperiment und die Kolmogoroff-Axiome****1.6 Die absoluten Häufigkeiten****1.7 Die relativen Häufigkeiten****1.8 Das Elementarereignis und der Wahrscheinlichkeitsbegriff****1.9 Die Zufallsfunktion****1.10 Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P$ , kurz die Verteilung****1.11 Beliebige Momente einer Verteilung:  $c$  ist frei wählbar**

Es gibt unendlich viele beliebige Momente, die sich aus der Formel (1.1) ergeben, da die Wahl von sowohl  $c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) als auch die der Zahl  $m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) frei ist.

Alle beliebigen Momente können quantitativ berechnet werden sobald die normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung vorliegt. Es stellt sich prinzipiell die Frage wofür normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen benötigt werden. Wenn die normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, oder kurz Verteilung, bekannt ist, dann können, und das ist der Inhalt der abstrakten Formel (1.1), alle beliebigen Momente quantitativ berechnet werden. Die Summe aller  $P(\varepsilon_i)$  ist immer 1. Sollte  $P(\varepsilon_i)$  nicht bekannt sein, aber die Momente, dann lässt sich  $P(\varepsilon_i)$  im Nachhinein rekonstruieren. Es lässt sich damit auch feststellen, ob der Würfel gezinkt oder echt ist. Die Notwendigkeit von  $c$  wird im Folgenden erklärt.

Der Sachverhalt einer normierten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung kann durch die Formel (1.2) zum Ausdruck gebracht werden.

$$\sum P(\varepsilon_i) = 1 \tag{1.2}$$

Es können sofort unendlich viele nullte beliebige Momente berechnen werden. Aber es gibt lediglich ein einziges nulltes Moment, da unabhängig vom gewählten  $c$ , das

nullte Moment immer 1 ist, vorausgesetzt die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist normiert.

## 1.12 Clevere Wahl: $c = 0$

Falls man  $c = 0$  wählt, vereinfacht sich Gleichung (1.1) zum folgenden Term.

$$E_0^{(m)} = E^{(m)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^m \cdot P(\varepsilon_i) \quad (1.3)$$

Falls  $c = 0$  gewählt wurde, nennt man  $E^{(m)}$  das  $m$ -te Anfangsmoment und vernachlässigt den Index  $c$ , weil er Null ist.

Wenn man das nullte Anfangsmoment berechnet ergibt sich der Wert 1, so wie es für alle nullten Momente immer der Fall ist.

## 1.13 Das erste und zweite Anfangsmoment: $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$

Falls man das erste Anfangsmoment  $E^{(1)}$  berechnen muss, weiß man, dass  $m = 1$  und  $c = 0$  sein sollen. Für den perfekten Würfel erhält man mit Gleichung (1.3) folgendes Resultat.

$$E^{(1)} = \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Das Resultat ist der Mittelwert aller möglichen Wurfresultate. Darauf hätte man auch intuitiv kommen können, da die Summe aller möglichen Elementarereignisse (insgesamt 21 Würfelrollen) durch die Mächtigkeit der Menge der möglichen Elementarereignisse (6 verschiedene Elementarereignisse) geteilt wird. Es ist erstaunlich, dass der Mittelwert 3.5 beim Würfeln nie selbst als Elementarereignis auftritt. Es ist auch erstaunlich, dass der Mittelwert alleine niemals für die vollständige Charakterisierung einer Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ausreicht.

Ein anderes Wort für Mittelwert ist der Begriff Erwartungswert mit den Symbolen  $E$ ,  $\bar{E}$  und  $\langle E \rangle$ . Wir bleiben bei der systematischen Bezeichnung, das erste Anfangsmoment  $E^{(1)}$  der vorgegebenen Verteilung. Daher wird der Mittelwert, wie auch im nachfolgenden Kapitel, aus Gründen der Systematik als  $E^{(1)}$  bezeichnet.

In völliger Analogie zum ersten Anfangsmoment berechnet man das zweite Anfangsmoment  $E^{(2)}$ . In der Formel (1.3) steht dann für  $m$  überall die Zahl 2. Für den Würfel ergibt sich konkret das Ergebnis  $\frac{91}{6}$ . Entsprechend lassen sich alle höheren  $m$ -te Anfangsmomente berechnen.

## 1.14 Supercleverer Wahl: $c = \text{Mittelwert}$

Falls  $c = \text{Mittelwert}$ , dann nennt man die berechenbaren Momente „Zentralmomente“, die anhand der Gleichung (1.4) bestimmt werden. Der Mittelwert wird wieder mit  $E^{(1)}$  abgekürzt.

$$E_{E^{(1)}}^{(m)} = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - E^{(1)})^m \cdot P(\varepsilon_i) \quad (1.4)$$

Das nullte Zentralmoment ist 1, das erste Zentralmoment ist 0 und das zweite Zentralmoment ist von überragender Bedeutung und wird im nächsten Kapitel näher behandelt.

## 1.15 Das zweite Zentralmoment

Das zweite Zentralmoment ist von zentraler Bedeutung, denn es ist von allen zweiten Momenten, die entsprechend der Gleichung (1.1) berechnet werden können, das kleinste. Es kann mit Gleichung (1.4), die als Definitionsgleichung behandelt wird, oder noch einfacher mit Gleichung (1.5) berechnet werden<sup>2</sup>. Diese Tatsache hat ungeheure Konsequenzen für die Statistik, Mathematik, Mechanik, Quantenmechanik und insbesondere für die statistische Thermodynamik. Man erkennt anhand von Gleichung (1.4) mit  $m = 2$ , dass das zweite Zentralmoment immer positiv sein muss. Aus Gleichung (1.5) ergibt sich, dass bei jeder Verteilung, das zweite Anfangsmoment größer ist, als das erste Anfangsmoment zum Quadrat.

$$E_z^{(2)} = E^{(2)} - (E^{(1)})^2 \quad (1.5)$$

<sup>2</sup> Um die Verwechslung von der Ordinalzahl  $m$  mit der Potenz zu vermeiden, wird  $m$  in den Formeln stets in Klammern geschrieben.

## 1.16 Das zweite Zentralmoment: Eine Aussage und zwei Beweise

Die Gleichung (1.5) wird in der Folge bewiesen.

Man beginnt mit der Definitionsgleichung (1.4) und wertet die Summe durch Quadratbildung aus. Dann ergibt sich die Formel (1.6). Mit der Formel (1.4) bildet man also das zweite Zentralmoment und wendet dann die binomische Formel  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$  an.

$$E_z^{(2)} = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - E^{(1)})^2 \cdot P(\varepsilon_i)$$

$$E_z^{(2)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \cdot P(\varepsilon_i) - 2 \cdot E^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot P(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n (E^{(1)})^2 \cdot P(\varepsilon_i) \quad (1.6)$$

Wird die Gleichung (1.1), mit der Bedingung  $c = 0$ , jetzt angewendet, können alle Terme durch die bereits bekannten Anfangsmomente ersetzt werden, was wiederum Gleichung (1.5) ergibt.

$$E_z^{(2)} = E^{(2)} - 2 \cdot (E^{(1)})^2 + (E^{(1)})^2 = E^{(2)} - (E^{(1)})^2$$

■

Jetzt wird die Aussage, dass das zweite Zentralmoment, das kleinste von allen zweiten beliebigen Momenten ist bewiesen. Dazu wird die Gleichung (1.1) für beliebige zweite Momente, ähnlich wie Gleichung (1.6), ausmultipliziert. Daraus ergibt sich dann Gleichung (1.7).

$$E_c^{(2)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \cdot P(\varepsilon_i) - 2 \cdot c \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot P(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n c^2 \cdot P(\varepsilon_i) \quad (1.7)$$

Anschließend wird die Formel (1.7) mithilfe von Gleichung (1.1) vereinfacht und passend quadratisch ergänzt (auch bekannt als intelligente Null).

$$E_c^{(2)} = E^{(2)} - 2 \cdot c \cdot E^{(1)} + c^2 + (E^{(1)})^2 - (E^{(1)})^2 \quad (1.8)$$

Durch Anwendung der bereits bewiesenen Formel (1.5) und durch Faktorisieren gelangt man anschließend zur Gleichung (1.9).

$$E_c^{(2)} = E_z^{(2)} + (c - E^{(1)})^2 \quad (1.9)$$

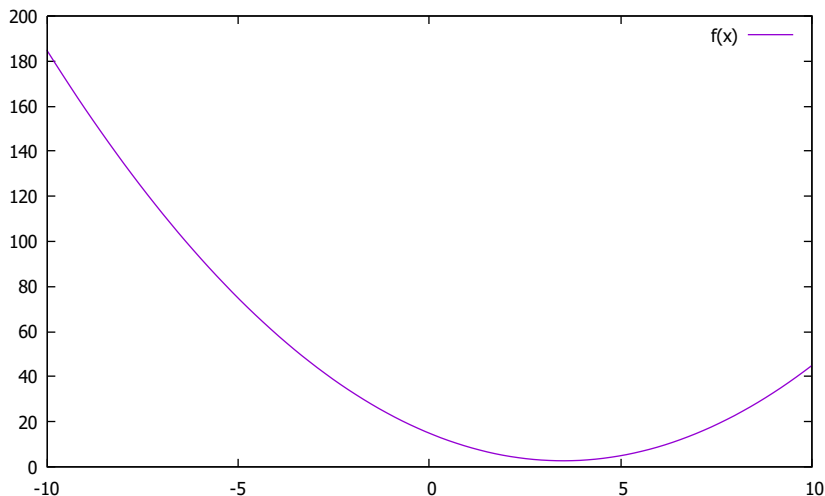
In der Gleichung stehen nur quadrierte Terme<sup>3</sup>. Damit  $E_c^{(2)}$  also minimal wird, muss der Term  $(c - E^{(1)})^2$  so klein wie möglich sein. Intuitiv erkennt man, dass der Term sich auflöst, wenn  $c = E^{(1)}$  ist. Kleiner als Null kann der Term nicht werden, da er quadriert wird.

Alternativ, können auch die ersten beiden Ableitungen von  $E_c^{(2)}$  nach  $c$  gebildet werden, um herauszufinden, wann das beliebige zweite Moment minimal ist. Am einfachsten wird die Ableitung von der bereits aufgelösten Gleichung (1.8) gebildet.

$$\frac{\partial}{\partial c} E_c^{(2)} = -2 \cdot E^{(1)} + 2 \cdot c = 0 \Rightarrow c = E^{(1)} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 c} E_c^{(2)} = 2 \quad (1.11)$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung ergibt  $c = E^{(1)}$ , also befindet sich an dieser Stelle eine Extremalstelle. Da die zweite Ableitung positiv ist, ist diese Extremalstelle ein Minimum. Dies waren zwei Beweise dafür, dass das zweite Zentralmoment von allen beliebigen zweiten Momenten das kleinste ist. ■



**3** Bei der Berechnung von zweiten Momenten muss man auch quadrieren, siehe Gleichung (1.1).

In der statistischen Thermodynamik ist das zweite Zentralmoment mit der Wärmekapazität  $c_V$ , für eine festgelegte Temperatur, verknüpft.

## 1.17 20 Beispiele für Verteilungen

20 Beispiele

### 1.18 Ausblick

Es können auch die dritten, die vierten usw. Momente berechnet werden, aber in der statistischen Thermodynamik ist lediglich das zweite Zentralmoment von erheblicher Bedeutung und sollte nicht vergessen werden.

### 1.19 Übungen

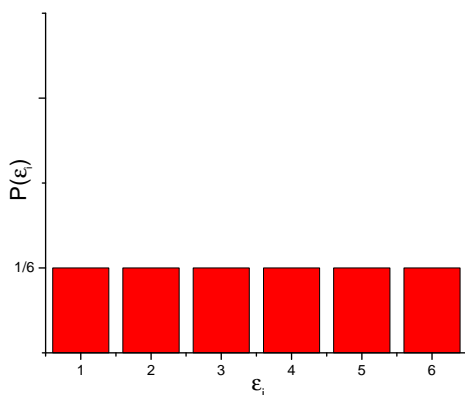


1. Stellen sie sich einen perfekten sechsseitigen Würfel mit einer normierten Verteilung vor.

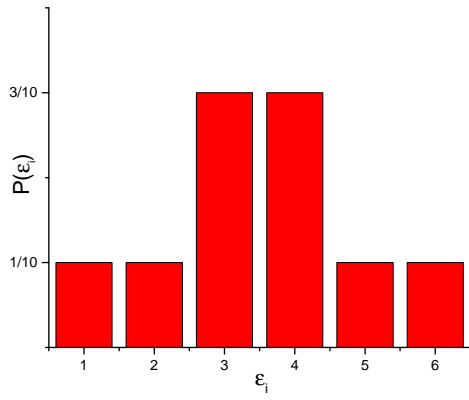


- (a) Berechnen sie das nullte Moment mit  $c = 42$ . (Lösung:  $E_{42}^{(0)} = 1$ )
- (b) Berechnen sie das erste und zweite Anfangsmoment.
- (c) Berechnen sie das erste Zentralmoment. (Lösung:  $E_Z^{(1)} = 0$ )
- (d) Berechnen sie das zweite Zentralmoment.
- (e) Wiederholen sie Aufgabe (a) - (d) für den perfekten tetraedrischen Würfel.
2. Bei der Herstellung eines Würfels ist ein Fehler aufgetreten. Die Seite mit einem Würfelauge hat fälschlicherweise sechs Augen. Ansonsten ist der Würfel identisch mit dem perfekten Würfel.
- (a) Zeichnen sie normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung in einem Säulendiagramm.
- (b) Berechnen sie das erste und das zweite Anfangsmoment.
- (c) Berechnen sie das zweite Zentralmoment.
- (d) Wie verändert sich die normierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, wenn anstelle des sechsseitigen mit einem perfekten fünfseitigen Würfel gewürfelt wird?
3. Es sind drei verschiedene Verteilungen gegeben.

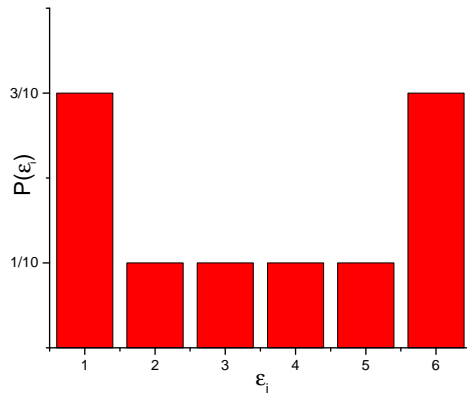
(a)



(b)



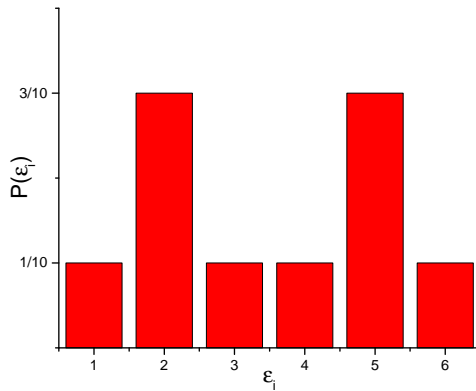
(c)



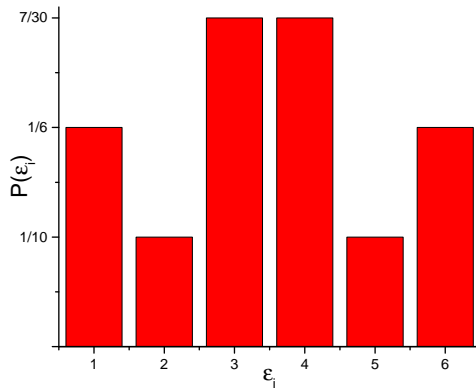
- i. Berechnen sie für jede Verteilung das erste und zweite Anfangsmoment.
- ii. Warum sind die ersten Anfangsmomente jeweils gleich?
- iii. Warum sind die zweiten Anfangsmomente verschieden?
- iv. Berechnen sie das zweite Zentralmoment.
- v. Welche Verteilung muss vorliegen, damit das zweite Zentralmoment das kleinste wird?
- vi. Reichen die berechneten Werte aus, um die Verteilungen vollständig zu charakterisieren?

4. Es sind zwei verschiedene Verteilungen gegeben.

(a)



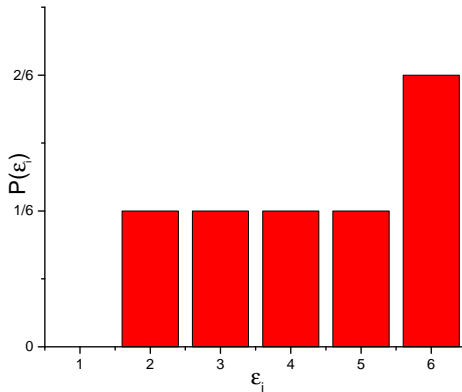
(b)



- i. Berechnen sie für jede Verteilung das erste und zweite Anfangsmoment.
- ii. Berechnen sie das zweite Zentralmoment.



2. (a)



(b)  $E^{(1)} = \frac{13}{3}$  und  $E^{(2)} = 21$

(c)  $E_Z^{(2)} = \frac{20}{9}$

(d) Bei einem fünfseitigen Würfel treten fünf verschiedene Elementarereignisse auf, deren Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung identisch ist.

3. i. (a)  $E^{(1)} = \frac{7}{2}$  und  $E^{(2)} = \frac{91}{6}$

(b)  $E^{(1)} = \frac{7}{2}$  und  $E^{(2)} = \frac{141}{10}$

(c)  $E^{(1)} = \frac{7}{2}$  und  $E^{(2)} = \frac{33}{2}$

ii. Da die gegebenen Verteilungen symmetrisch sind, bleibt der Mittelwert der gleiche.

iii. Die zweiten Anfangsmomente sind verschiedenen, weil die Verteilungen verschieden sind.

iv. (a)  $E_Z^{(2)} = \frac{35}{12}$

(b)  $E_Z^{(2)} = \frac{37}{20}$

(c)  $E_Z^{(2)} = \frac{17}{4}$

v. Die Verteilung (b) muss vorliegen, damit das zweite Zentralmoment das kleinste wird.

vi. Ich würde sagen, dass es reicht (zumindest für den Bereich der in der statistischen Thermodynamik benötigt wird).

4. i. Das erste und das zweite Anfangsmoment sind für beide Verteilungen identisch, nämlich:  $E^{(1)} = \frac{7}{2}$  und  $E^{(2)} = \frac{149}{10}$ .ii. Das zweite Zentralmoment,  $E_Z^{(2)} = \frac{53}{20}$ , ist für beide Verteilungen identisch.

iii. Nein, die berechneten Werte reichen nicht aus, um die Verteilungen vollständig zu charakterisieren. Um sie vollständig zu charakterisieren, kann man die weiteren Anfangsmomente berechnen. Dann stellt man fest, dass das dritte Anfangsmoment  $E^{(3)} = \frac{707}{10}$  nicht reicht, um die beiden Verteilungen zu charakterisieren. Die vierten Anfangsmomente der beiden Verteilungen sind unterschiedlich, nach deren Berechnung sind sie vollständig charakterisiert.

$$(a) E^{(4)} = \frac{3557}{10}$$

$$(b) E^{(4)} = \frac{3589}{10}$$

5. (a) Mit dem tetraedrischen Würfel kann man die Startposition statistisch am schnellsten verlassen, da die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu Würfeln beim tetraedrischen Würfel ( $P(\varepsilon_i) = \frac{1}{4}$ ) höher ist, als beim klassischen Würfel ( $P(\varepsilon_i) = \frac{1}{6}$ ).
- (b) Mit dem klassischen Würfel kann man das Spielfeld statistisch am schnellsten überqueren, da das erste Anfangsmoment, also der Mittelwert, der möglichen Würfe beim sechsseitigen Würfel ( $E^{(1)} = \frac{7}{2}$ ) größer ist als beim tetraedrischen Würfel ( $E^{(1)} = 3$ ).
- (c) Nein, das kann man mit den bisher berechneten Werten nicht. Um dies vorauszusagen müsste man die Wahrscheinlichkeit die Startposition zu verlassen mit der zu überquerenden Feldanzahl gegeneinander abwägen. Zudem muss man weitere Aspekte beachten, wie zum Beispiel, die Anzahl der Würfe die nötig sind, um seine Figur in die Endposition einzurücken.

## 1.21 Zusammenfassung